# РАДІОТЕХНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

УДК 621.396.96
DOI https://doi.org/10.32782/2663-5941/2023.2.1/09

***Воловик А.Ю.***
Вінницький національний технічний університет

## ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНІ РОБАСТНІ ОЦІНКИ СТАНУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З НЕВИЗНАЧЕНИМИ ВХОДАМИ

*У представленій роботі розглядається задача оцінки вектора стану лінійної дискретної системи в присутності неконтрольованих невизначених входів. Як правило, невизначені входи при моделюванні прийнято враховувати у вигляді випадкового процесу із заданою статистикою або представляти їх у якості постійних зсувів. Недоліком такого підходу є те, що будь-яке неадекватне припущення про їхню модель негативно позначається на якості роботи фільтра. Проте, існують фільтри з підвищеною стійкістю, які формують квазіоптимальні оцінки вектора стану системи незалежно від властивостей невизначених входів. Запропоновано новий метод побудови оцінок стану лінійної системи з змінними параметрами при наявності невизначених входів, що полягає у застосуванні двоетапної процедури розщеплення розширеного фільтра Калмана на два, вузькоспеціалізованих фільтра меншої розмірності, що працюють паралельно. Новизна методу полягає в розробці спрощеної структури двокаскадного фільтра Калмана, стійкого до впливу невизначених входів. Запропонований метод є альтернативою робастному фільтру Кітанідіса, але відрізняється простотою математичних розрахунків  й відсутністю трудомістких процедур оптимізації за допомогою варіаційного обчислення, на зразок методу векторних множників Лагранжа із властивими йому обмеженнями. Практична цінність запропонованого методу синтезу робастного фільтра визначається можливістю його застосування у якості доповнення до стандартного фільтра Калмана, як засобу досягнення оптимальної якості процесу фільтрації для систем з невизначеними входами, тобто систем із частково відомою динамікою.*

***Ключові слова:*** *невизначений вхід, декомпозиція, мінімальна узагальнена дисперсія, двох етапна апроксимація розширеного фільтра.*

**Вступ.** Досить часто для практичних задач невизначеності нестаціонарних лінійних динамічних систем інтерпретуються, як невідомі збурення. У математичній моделі їх враховують уведенням додаткових неконтрольованих входів. У даній роботі розглядається задача оцінювання вектора стану лінійної нестаціонарної дискретної системи яка є інваріантною до неконтрольованих невизначених входів. У загальному випадку, невизначені входи прийнято подавати у вигляді стохастичного процесу із заданою статистикою [8] або розглядати їх як постійні зсуви [7]. Недоліком цього підходу є те, що у випадку відсутності апріорних даних про статистику невизначеного входу, будь-яке неадекватне припущення про їхню модель негативно позначається на якості роботи фільтра. Проте, відомі фільтри підвищеної надійності [1–5, 10, 11, 14], які дають оптимальні оцінки вектора стану системи відповідно до обраного критерію якості незалежно від властивостей невизначених входів. Зокрема, Кітанідіс [1] при наявності невизначених входів запропонував фільтр Калмана, оптимальність якого досягалася шляхом мінімізації сліду коваріаційної матриці помилок фільтрації за рахунок уведення додаткових алгебраїчних обмежень. Дораух і Засадзинск [2] поширили результати роботи [1] на методи оцінки параметрів і отримали незміщені оцінки вектора стану з мінімальною дисперсією. Незважаючи на те, що їх метод є більш складним у порівнянні з методом Кітанідіса, їм вдалося виключити з розгляду трудомісткі методи оптимізації з використанням матричних функцій і множників Лагранжа. Келлер і ін. в [4] запропонували альтернативну й більш просту форму запису рівнянь параметричного оцінювання. В роботі [3] використовуючи, метод декомпозиції невизначених входів, у комбінації з інноваційним підходом, було отримано фільтр робастного типу. Форма представлення цього фільтра є найбільш загальною, оскільки складова з невизначеними входами присутня у рівняннях спостережень, а системні шуми і шуми спостережень є статистично залежними. Делайон з співавторами [6] запропонували інший метод фільтрації при наявності невизначених входів, заснований на перетворенні вихідної системи в систему спеціального виду, з якої невизначений вхід був вилучений. На жаль, застосування цього методу обмежується системами, що мають тільки певні, позитивно визначені коваріаційні матриці. В представленій роботі пропонується метод синтезу робастного фільтра, який є нечутливим до впливів невизначених входів. Цей фільтр побудований на основі технології синтезу двох каскадного фільтра Калмана [9] і нового методу фільтрації невизначеного входу. В процесі синтезу, окремо доведена його еквівалентність фільтру Кітанідіса. На відміну від інших запропонований метод є більш зручним для практичних додатків і вимагає тільки однієї двоетапної процедури ортогонального перетворення.

Потрібно додатково зауважити, що при деяких спрощених припущеннях щодо моделей невизначених входів, для обчислення їх перших двох моментів, можна використовувати методи адаптивної фільтрації в комбінації з методами ідентифікації параметрів [1]. У таких випадках, модель невизначеного входу стає доступною, а застосування розширеного фільтра Калмана може гарантувати менші значення коваріаційної матриці помилок фільтрації в порівнянні з фільтром робастного типу. Отже, для застосування методів адаптивної фільтрації пропонується нова, двоетапна процедура оцінювання стану системи з невизначеними входами. На першому етапі, при відсутності інформації щодо моделі невизначених входів, доцільно застосовувати робастний фільтр Калмана, що дає можливість отримати наближені оцінки вектору стану. У цей же час, із метою уточнення моделі невизначеного входу, використовується відповідна процедура ідентифікації. У випадку успішного її завершення замість робастного фільтра необхідно застосувати розширений фільтр Калмана, за допомогою якого, відбувається подальше уточнення оцінок вектора стану системи. Вочевидь, що для плавного перемикання режимів «робастний – розширений», фільтри повинні мати співпадаючі обчислювальні структури, тому, під час синтезу в обох розглянутих фільтрах використовується двокаскадний еквівалент розширеного фільтра Калмана. Важливою перевагою отриманого робастного фільтра є можливість його легкого приведення до форми розширеного фільтра Калмана, що теж представлений у двокаскадному варіанті і є добре відомим як оптимальний двокаскадний фільтр Калмана з мінімально можливими обчислювальними витратами [9]. Як підсумок – основним завданням майбутнього синтезу є отримання робастного фільтра Калмана у вигляді двох каскадної структури, що у подальшому називатимеся робастним двох каскадним фільтром Калмана. Структуру такого фільтру нескладно отримати на основі алгоритму оптимального двокаскадного фільтра Калмана в комбінації з рівняннями спостережень фільтра з невизначеними входами. Осатаній, в свою чергу, є еквівалентним фільтру Кітанідіса [1].

Структурно стаття складається з постановки завдання дослідження, побудови робастного фільтра Калмана, доведенні теореми про еквівалентність робастного фільтра й фільтра Кітанідіса, порівняння з раніше отриманими результатами, зокрема з результатами робіт [2, 6, 13] і підведення підсумків роботи.

**Постановка задачі дослідження.** Розглянемо лінійну дискретну систему стохастичного типу, у якій невідомі входи задаються у вигляді

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k+1,k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}(k+1,k)\mathbf{d}(k) + \mathbf{w}(k); \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \eta(k), \quad (2)$$

де $\mathbf{x}(k) \in \Re^n$ – вектор стану системи, $\mathbf{d}(k) \in \Re^p$ – вектор невідомих входів, $\mathbf{y}(k) \in \Re^m$ – вектор спостережень. Системні матриці $\mathbf{A}(k+1,k), \mathbf{H}(k), \mathbf{E}(k+1,k)$ відомі і мають відповідні розмірності, окрім того є справедливими припущення: $rank\left[\mathbf{E}(k+1,k)\right] = p$, $rank\left[\mathbf{H}(k)\right] = m(\geq p)$, $rank\left[\mathbf{H}(k)\mathbf{E}(k,k-1)\right] = p$ . Дискретні шуми стану та спостережень $\eta(k)$ являють собою білі шумові послідовності з нульовими середніми значеннями, що мають задані коваріаційна матриці

$$E\left\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(l)\right\} = \mathbf{Q}(k)\delta(k,l),$$

$$E\left\{\eta(k)\eta^T(l)\right\} = \mathbf{Q}(k)\delta(k,l), E\left\{\mathbf{w}(k)\eta^T(l)\right\} = 0,$$

де $T$ – символ транспонування, $\delta(k,l)$ – дельта функція Кронекера.

Загальний підхід до розв'язку поставленого завдання припускає, що компонента ***d(k)*** інтерпретується у вигляді стохастичного процесу,

$$\mathbf{d}(k+1) = \mathbf{d}(k) + \mathbf{w}_d(k), \quad (3)$$

де $\boldsymbol{w}_d(k)$ – біла шумова послідовність з нульовим середнім значенням і заданими коваріаційними матрицями :

$$E\left\{\mathbf{w}_d(k)\mathbf{w}_d^T(l)\right\} = \mathbf{Q}_d(k)\delta(k,l) \text{ та}$$

$$E\left\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}_d^T(l)\right\} = \mathbf{Q}_{xd}(k)\delta(k,l).$$

Якщо ввести розширений вектор стану, що складається з ***x(k)*** й ***d(k)*** та використати алгоритм розширеного фільтру Калмана, то стає можливим одержувати оцінки стану оптимального типу. Однак, з ростом розмірності розширеного вектора стану радикально зростають обчислювальні витрати й помилки обчислень. Отже, розширений фільтр Калмана буде важко реалізованим на практиці. У цьому випадку більш доцільним буде варіант використання оптимального двокаскадного фільтра Калмана, який полягає їх двох допоміжних фільтрів, один з яких являє собою модифікований фільтр вільний від впливу зсувів, а інший спеціально орієнтований на їхнє оцінювання. У сукупності ці два фільтри є еквівалентними розширеному фільтру Калмана, розглянутому в роботі [8]. Основний недолік цього підходу полягає в тому, що оптимальність цього фільтра досягається за рахунок вибору компромісних співвідношень між коваріаційними матрицями $\boldsymbol{Q_d}$ і $\boldsymbol{Q_{xd}}$ [1].

Альтернативний метод одержання фільтра інваріантного до впливів невизначених входів полягає в застосуванні принципу декомпозиції. Кітанідісом був запропонований метод синтезу робастного лінійного фільтра, який забезпечує незміщеність отриманих оцінок у комбінації з мінімальним значенням узагальненої дисперсії й у той же час є нечутливим до впливів з боку невизначених входів. У цьому випадку оптимальні оцінки формуються з наступних співвідношень [1]:

$$\bar{\mathbf{x}}\left({}^{k}\!/_{k}\right) = \bar{\mathbf{x}}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) + \mathbf{L}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\bar{\mathbf{x}}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\right]; \quad (4)$$

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{K}(k) + \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)\right]\mathbf{E}(k,k-1)\times$$

$$\begin{aligned}&\times\left\{\mathbf{E}^T(k,k-1)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{E}(k,k-1)\right\}^{-1}\\&\mathbf{E}^T(k,k-1)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k)\end{aligned}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_{\bar{x}}\left({}^{k}\!/_{k}\right) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{L}(k)\mathbf{H}(k)\right]\mathbf{P}_{\bar{x}}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\left[\mathbf{I} - \mathbf{L}(k)\mathbf{H}(k)\right]^T + \\&+\mathbf{L}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{L}^T(k)\end{aligned}, \quad (6)$$

де
$$\bar{\mathbf{x}}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) = \mathbf{A}(k,k-1)\bar{\mathbf{x}}\left({}^{k-1}\!/_{k-1}\right); \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{\bar{x}}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) = \mathbf{A}(k,k-1)\mathbf{P}_{\bar{x}}\left({}^{k-1}\!/_{k-1}\right)\mathbf{A}^T(k,k-1) + \mathbf{Q}(k-1); \quad (8)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}_{\bar{x}}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k); \quad (9)$$

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{\bar{x}}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k). \quad (10)$$

З [1] відомо, що фільтр який формує незміщені оцінки з мінімальною дисперсією не є глобально оптимальним у змісті мінімуму середньоквадратичної похибки оцінювання, за винятком особливого випадку, коли інформація про властивості вектора збурювання є повністю відсутньою, тобто вектор $\boldsymbol{d(k)}$ є довільною функцією часу. У зв'язку із цим, робастний фільтр має головну перевагу – інваріантність показників якості роботи до вектора невизначених входів. Ця якість є особливо важливою у випадку, коли статистичні властивості вектора $\boldsymbol{d(k)}$ суттєво не Гаусові або інформація про них зовсім відсутня. Метою подальших розрахунків є отримання еквівалентного перетворення фільтра Кітанідіса (4)–(10) у форму двох каскадного фільтра Калмана.

**Робастний двокаскадний фільтр Калмана.** Основа синтезу робастного фільтра Калмана з характеристиками якості інваріантними до невизначеного входу, полягає в модифікації фільтра, який спеціально орієнтований на оцінювання зсувів. Крім того модифікації також підлягає його вагова матриця $\boldsymbol{U(k)}$. Нижче, у якості довідки, приводиться перелік операторів оптимального двокаскадного фільтра Калмана [8], отриманого при розширенні вектора стану в системі рівнянь (1)–(3):

$$\hat{\mathbf{x}}\left({}^{k}\!/_{k}\right) = \mathbf{x}^*\left({}^{k}\!/_{k}\right) + \mathbf{V}(k)\mathbf{d}^*\left({}^{k}\!/_{k}\right); \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_{\hat{x}}\left({}^{k}\!/_{k}\right) = \mathbf{P}_{x^*}\left({}^{k}\!/_{k}\right) + \mathbf{V}(k)\mathbf{P}_d\left({}^{k}\!/_{k}\right)\mathbf{V}^T(k), \quad (12)$$

де $\mathbf{x}^*\left({}^{k}\!/_{k}\right)$ – оцінка стану першого розщепленого фільтру:

$$\mathbf{x}^*\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) = \mathbf{A}(k,k-1)\mathbf{x}^*\left({}^{k-1}\!/_{k-1}\right) + \bar{\mathbf{u}}(k-1); \quad (13)$$

$$\mathbf{x}^*\left({}^{k}\!/_{k}\right) = \mathbf{x}^*\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) + \mathbf{K}_{x^*}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}^*\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\right]; \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_{x^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) = \mathbf{A}(k,k-1)\mathbf{P}_{x^*}\left({}^{k-1}\!/_{k-1}\right)\mathbf{A}^T(k,k-1) + \bar{\mathbf{Q}}(k-1); \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_{x^*}(k) = \mathbf{P}_{x^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\mathbf{H}^T(k)\left[\mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{x^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)\right]^{-1}; \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_x\left({}^{k}\!/_{k}\right) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x^*}(k)\mathbf{H}(k)\right]\mathbf{P}_{x^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right); \quad (17)$$

$\mathbf{d}^*\left({}^{k}\!/_{k}\right)$ – оцінка входу другого розщепленого фільтру:

$$\mathbf{d}^*\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) = \mathbf{d}^*\left({}^{k-1}\!/_{k-1}\right); \quad (18)$$

$$\mathbf{d}^*\left({}^{k}\!/_{k}\right) = \mathbf{d}^*\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) + \mathbf{K}_{d^*}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}^*\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) - \mathbf{S}(k)\mathbf{d}^*\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\right]; \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_{d^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right) = \mathbf{P}_{d^*}\left({}^{k-1}\!/_{k-1}\right) + \mathbf{Q}_{d^*}(k-1); \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_{d^*}(k) = \mathbf{P}_{d^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\mathbf{S}^T(k)\begin{bmatrix}\mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{x^*}\left({}^{k}\!/_{k}\right)\mathbf{H}^T(k) + \\ +\mathbf{R}(k) + \mathbf{S}(k)\mathbf{P}_{d^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\mathbf{S}^T(k)\end{bmatrix}^{-1}; \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{d^*}\left({}^{k}\!/_{k}\right) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_{d^*}(k)\mathbf{S}(k)\right]\mathbf{P}_{d^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right); \quad (22)$$

Матриці корекції:

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \left[\bar{\mathbf{U}}(k+1) - \mathbf{U}(k+1)\right]\mathbf{d}^*\left({}^{k}\!/_{k}\right); \quad (23)$$

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbf{Q}}(k) = \mathbf{Q}(k) - \mathbf{Q}_{xd}(k)\bar{\mathbf{U}}^T(k+1) - \\&-\mathbf{U}(k+1)\left[\mathbf{Q}_{xd}(k) - \bar{\mathbf{U}}(k+1)\mathbf{Q}_d(k)\right]^T\end{aligned}; \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{U}}(k) = \mathbf{A}(k,k-1)\mathbf{V}(k-1) + \mathbf{E}(k,k-1); \quad (25)$$

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{U}(k), \quad (26)$$

де $\mathbf{U}(k)$ і $\mathbf{V}(k)$ – двох шагові вагові матриці, що визначаються рівняннями

$$\mathbf{U}(k) = \bar{\mathbf{U}}(k) + \left[\mathbf{Q}_{xd}(k-1) - \bar{\mathbf{U}}(k)\mathbf{Q}_d(k-1)\right]\left[\mathbf{P}_{d^*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\right]^{-1}; \quad (27)$$

$$\mathbf{V}(k) = \mathbf{U}(k) - \mathbf{K}_{x^*}(k)\mathbf{S}(k). \quad (28)$$

З (18)–(22) видно, що $\mathbf{d}^*\left({}^{k}\!/_{k}\right)$ являє собою оцінку невизначеного входу у сенсі мінімуму середньоквадратичної похибки за умови існування коваріаційних матриць $\mathbf{Q}_d(k)$ і $\mathbf{Q}_{xd}(k)$. Однак, якщо ці статистичні дані невідомі або маловірогідні, то фільтр не в змозі формувати оптимальну оцінку стану. Для подолання даного ускладнення використаємо наступний підхід.

Як відомо, роботу оптимального фільтра Калмана можна характеризувати за допомогою двох, взаємно суперечливих складових. З однієї сторони процес відновлення характеризується складовою, яка обумовлена впливом рівняння динаміки об'єкта, і є причиною появи динамічних помилок. З другої, причиною появи додаткових помилок статистичного характеру є математична модель каналу спостережень. Матриця передачі фільтра Калмана зважує ці складові таким чином, що результуюча помилка фільтрації стає мінімально можливою, тобто реалізує найкращий компромісний баланс між ними. Коли модель невизначеного входу (3) є не коректною або маловірогідною, складові, що задаються рівняннями (18) і (20) не викликають довіри. Отже, їх бажано виключити з подальшого розгляду, тобто модифікувати математичну модель каналу спостережень (19)–(22) з метою виключення значень $\mathbf{d}^*\left({}^{k}/_{k-1}\right)$ і $\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k-1}\right)$. Це можна здійснити шляхом підстановки (18) в (19) з наступною комбінацією рівнянь (21) і (22). Результатом цих перетворень є модифікована складова рівняння спостережень, яка ухвалює наступний вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^*\left({}^{k}/_{k}\right) &= \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_{d*}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{U}(k)\right]\mathbf{d}^*\left({}^{k-1}/_{k-1}\right) + \\ &+ \mathbf{K}_{d*}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k-1}\right)\right]\end{aligned}; \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_{d*}(k) = \mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k}\right)\mathbf{U}^T(k)\mathbf{H}^T(k)\left[\mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k}\right)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)\right]^{-1}. \quad (30)$$

Слід підкреслити, що нове рівняння для каналу спостережень повністю визначається тільки після того, як будуть знайдені матриці $\boldsymbol{U(k)}$ й $\boldsymbol{P}_{d*}\boldsymbol{(k/k)}$.

Спочатку, розглянемо коваріаційну матрицю помилок оцінювання невизначеного входу. Для того, щоб забезпечити незалежність оцінюючого невизначений вхід фільтра від базової моделі, пропонується вибирати матрицю передачі цього фільтра так, щоб виконувалося обмеження:

$$\mathbf{I} - \mathbf{K}_{d*}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{U}(k) = 0. \quad (31)$$

В цьому випадку вираз (29) прийме вигляд

$$\mathbf{d}^*\left({}^{k}/_{k}\right) = \mathbf{K}_{d*}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k-1}\right)\right]. \quad (32)$$

В подальшому підставимо (30) у (31) вирішаючи рівняння відносно $\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k}\right)$, получимо

$$\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k}\right) = \left[\mathbf{U}^T(k)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{U}(k)\right]^{-1}, \quad (33)$$

де

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}/_{k-1}\right)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k). \quad (34)$$

Потім розглянемо, як слід вибирати вагову матрицю $\boldsymbol{U(k)}$. Виходячи з чисто евристичних міркувань вирази (13) і (15) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k-1}\right) = \mathbf{A}(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}\left({}^{k-1}/_{k-1}\right) + [\bullet]_1, \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}/_{k-1}\right) = \mathbf{A}(k, k-1)\mathbf{P}_{\hat{x}}\left({}^{k-1}/_{k-1}\right)\mathbf{A}^T(k, k-1) + \mathbf{Q}(k-1) + [\bullet]_2, \quad (36)$$

де $\hat{\mathbf{x}}\left({}^{k}/_{k}\right)$ і $\mathbf{P}_{\hat{x}}\left({}^{k}/_{k}\right)$ визначаються формулами (11) та (12),відповідно, а

$$[\circ]_1 = \left[\mathbf{E}(k, k-1) - \mathbf{U}(k)\right]\mathbf{d}^*\left({}^{k-1}/_{k-1}\right), \quad (37)$$

$$\begin{aligned}[\circ]_2 &= \left[\mathbf{E}(k, k-1) - \mathbf{U}(k)\right]\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k-1}/_{k-1}\right)\left[\mathbf{E}(k, k-1) - \mathbf{U}(k)\right]^T - \\ &- \mathbf{U}(k)\left[\mathbf{Q}_{xd}(k-1)\right]^T - \mathbf{Q}_{xd}(k-1)\mathbf{U}^T(k) + \mathbf{U}(k)\mathbf{Q}_d(k-1)\mathbf{U}^T(k).\end{aligned} \quad (38)$$

З метою збереження стійкості (35) і (36) стосовно базової моделі невизначеного входу (3) є за доцільним вибрати:

$$[\circ]_1 = 0, \ [\circ]_2 = 0. \quad (39)$$

Таким чином, значення $\boldsymbol{U(k)}$ дорівнює:

$$\mathbf{U}(k) = \mathbf{E}(k, k-1). \quad (40)$$

Отримані результати дозволяють визначити робастний двокаскадний фільтр Калмана, у якому виключений вплив моделі невизначеного входу. Для цього слід підставити (35), (36), (32), (30) і (33) в (13) і (12), що в підсумку дає наступні співвідношення.

$$\hat{\mathbf{x}}\left({}^{k}/_{k}\right) = \mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k}\right) + \mathbf{V}(k)\mathbf{d}^*\left({}^{k}/_{k}\right); \quad (41)$$

$$\mathbf{P}_{\hat{x}}\left({}^{k}/_{k}\right) = \mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}/_{k}\right) + \mathbf{V}(k)\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k}\right)\mathbf{V}^T(k), \quad (42)$$

де $\mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k}\right)$ визначається рівняннями:

$$\mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k-1}\right) = \mathbf{A}(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}\left({}^{k-1}/_{k-1}\right); \quad (43)$$

$$\mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k}\right) = \mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k-1}\right) + \mathbf{K}_{x*}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k-1}\right)\right]; \quad (44)$$

$$\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}/_{k-1}\right) = \mathbf{A}(k, k-1)\mathbf{P}_{\hat{x}}\left({}^{k-1}/_{k-1}\right)\mathbf{A}^T(k, k-1) + \mathbf{Q}(k-1); \quad (45)$$

$$\mathbf{K}_{x*}(k) = \mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}/_{k-1}\right)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k); \quad (46)$$

$$\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}/_{k}\right) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x*}(k)\mathbf{H}(k)\right]\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}/_{k-1}\right), \quad (47)$$

$\mathbf{d}^*\left({}^{k}/_{k}\right)$ визначається рівняннями:

$$\mathbf{d}^*\left({}^{k}/_{k}\right) = \mathbf{K}_{d*}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}^*\left({}^{k}/_{k-1}\right)\right]; \quad (48)$$

$$\mathbf{K}_{d*}(k) = \mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k}\right)\mathbf{E}(k, k-1)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k); \quad (49)$$

$$\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k}\right) = \left[\mathbf{E}^T(k, k-1)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{E}(k, k-1)\right]^{-1}, \quad (50)$$

а $\mathbf{V}(k)$ і $\mathbf{C}(k)$ відповідно дорівнюють:

$$\mathbf{V}(k) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x*}(k)\mathbf{H}(k)\right]\mathbf{E}(k, k-1); \quad (51)$$

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}/_{k-1}\right)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k). \quad (52)$$

Запропонований робастний фільтр є еквівалентом фільтру Кітанідіса, представленого рівняннями (4)–(6). Доказ цього положення випливає з нижче наведеної теореми.

***Теорема:*** *Якщо ранг добутку* $rank\left[\mathbf{H}(k)\mathbf{E}(k, k-1)\right] = rank\left[\mathbf{E}(k, k-1)\right] = p$, *то робастний двокаскадний фільтр Калмана (41)–(52) є еквівалентним фільтру Кітанідіса (4)–(10).*

**Доказ:** Для доказу необхідно отримати такі попередні співвідношення:

1. З (40) та (33) можливо одержати

$$\mathbf{U}(k)\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}/_{k}\right)\mathbf{U}^T(k) = \mathbf{E}(k, k-1)\begin{bmatrix}\mathbf{E}^T(k, k-1) \\ \mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{E}(k, k-1)\end{bmatrix}^{-1}\mathbf{E}^T(k, k-1). \quad (53)$$

2. З (5) та (10) відповідно

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_x\left({}^{k}\!/_{k}\right)=\left[\mathbf{I}-\mathbf{L}(k)\mathbf{H}(k)\right]\mathbf{P}_x\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)+\\+\left[\mathbf{L}(k)-\mathbf{P}_x\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k)\right]\mathbf{C}(k)\mathbf{L}^T(k)\end{gathered}. \quad (54)$$

3. З (30), (53) та (34)

$$\mathbf{U}(k)\mathbf{K}_{d*}(k)=\mathbf{E}(k,k-1)\begin{bmatrix}\mathbf{E}^T(k,k-1)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k)\\ \mathbf{H}(k)\mathbf{E}(k,k-1)\end{bmatrix}^{-1}\mathbf{E}^T(k,k-1)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{C}^{-1}(k). \quad (55)$$

4. А з (30), (40) і (33) одержуємо

$$\mathbf{K}_{d*}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{K}^T{}_{d*}(k)=\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}\!/_{k}\right).$$

$$\mathbf{K}_{d*}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{K}^T{}_{d*}(k)=\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k}\!/_{k}\right). \quad (56)$$

5. Шляхом підстановки (41) і (42) у (35) і (36) можливо отримати

$$\mathbf{x}^*\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)=\mathbf{A}(k,k-1)\hat{\mathbf{x}}\left({}^{k-1}\!/_{k-1}\right), \quad (57)$$

$$\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k}\!/_{k-1}\right)=\mathbf{A}(k,k-1)\mathbf{P}_{\hat{x}}\left({}^{k-1}\!/_{k-1}\right)\mathbf{A}^T(k,k-1)+\mathbf{Q}(k-1). \quad (58)$$

Далі, попередньо припустимо, що у момент часу $k$ оцінки фільтра Кітанідіса, а також їх коваріаційна матриця співпадають з відповідними показниками двох каскадного фільтра Калмана, тобто

$$\bar{\mathbf{x}}\left({}^{k}\!/_{k}\right)=\hat{\mathbf{x}}\left({}^{k}\!/_{k}\right), \qquad \mathbf{P}_{\bar{x}}\left({}^{k}\!/_{k}\right)=\mathbf{P}_{\hat{x}}\left({}^{k}\!/_{k}\right). \quad (59)$$

Застосовуючи (8) та (58) можливо встановити, що

$$\mathbf{P}_x\left({}^{k+1}\!/_{k}\right)=\mathbf{P}_{x^*}\left({}^{k+1}\!/_{k}\right). \quad (60)$$

Використовуючи вираз (6), (10), (16), (55) і (60) отримаємо

$$\mathbf{L}(k+1)=\mathbf{K}_{x*}(k+1)+\left[\mathbf{I}-\mathbf{K}_{x*}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\right]\mathbf{U}(k+1)\mathbf{K}_{d*}(k+1). \quad (61)$$

Підставивши (61) у (4) та використовуючи (59), (57), (14), (51), і (32) можливо отримати

$$\begin{gathered}\bar{\mathbf{x}}\left({}^{k+1}\!/_{k+1}\right)=\mathbf{x}^*\left({}^{k+1}\!/_{k}\right)+\mathbf{K}_{x*}(k+1)\left[\mathbf{y}(k+1)-\mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}^*\left({}^{k+1}\!/_{k}\right)\right]+\\+\left[\mathbf{I}-\mathbf{K}_{x*}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\right]\mathbf{U}(k+1)\mathbf{K}_{d*}(k+1)\times\\\times\left[\mathbf{y}(k+1)-\mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}^*\left({}^{k+1}\!/_{k}\right)\right]=\mathbf{x}^*\left({}^{k+1}\!/_{k+1}\right)+\mathbf{V}(k+1)\mathbf{d}^*\left({}^{k+1}\!/_{k+1}\right).\end{gathered} \quad (62)$$

Підставимо (10), (16) і (60) у (54) знаходимо:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_{\bar{x}}\left({}^{k+1}\!/_{k+1}\right)=\left[\mathbf{I}-\mathbf{L}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\right]\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k+1}\!/_{k}\right)+\\+\left[\mathbf{L}(k+1)-\mathbf{K}_{x*}(k+1)\right]\mathbf{C}(k+1)\mathbf{L}^T(k+1)\end{gathered} \quad (63)$$

А підставляючи (61) у (63) і використовуючи (16), (17), (51) і (56) отримаємо

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}}\left({}^{k+1}\!/_{k+1}\right)=\left[\mathbf{I}-\mathbf{K}_{x*}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\right]\times\\\times\left\{\begin{gathered}\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k+1}\!/_{k}\right)+\mathbf{U}(k+1)\mathbf{K}_{d*}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\times\\\times\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{x*}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\right)\mathbf{U}(k+1)\mathbf{K}_{d*}(k+1)\right]^T\end{gathered}\right\}=\\=\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k+1}\!/_{k+1}\right)+\mathbf{V}(k+1)\mathbf{K}_{d*}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{K}^T{}_{d*}(k+1)\mathbf{V}^T(k+1)=\\=\mathbf{P}_{x*}\left({}^{k+1}\!/_{k+1}\right)+\mathbf{V}(k+1)\mathbf{P}_{d*}\left({}^{k+1}\!/_{k+1}\right)\mathbf{V}^T(k+1).\end{gathered} \quad (64)$$

Порівнюючи (62) і (64) з виразами (41) і (42), відповідно можна побачити, що вони містять (59) у момент часу *k+1*.

Важливою перевагою отриманого фільтра, який забезпечує незміщеність оцінок з мінімальною дисперсією шляхом застосування двоетапної технології, є гарантування показників, заявлених у роботі [1] без застосування обмежень властивих методу Лагранжа. Крім того, за допомогою запропонованого робастного фільтра каскадного типу можна встановити безпосередній зв'язок з розширеним фільтром Калмана, який гарантує глобальну оптимальність розв'язку завдання, пов'язаного з одержанням оцінок стану лінійної системи при наявності невизначених входів.

**Висновки.** У роботі представлений альтернативний варіант фільтра Кітанідіса, який формує незміщені оцінки вектора стану з мінімальною дисперсією для лінійної дискретної системи при наявності невизначених входів. Синтез запропонованого робастного фільтра заснований на застосуванні технології локально оптимальної апроксимації розширеного фільтра Калмана паралельно діючою двокаскадною розщепленою структурою, і на відміну від відомих робіт не містить трудомістких процедур оптимізації типу векторних множників Лагранжа й супутніх йому обмежень. Запропонований робастний фільтр можна використовувати в якості доповнення до стандартного фільтра Калмана в якості засобу досягнення оптимальної якості фільтрації для систем з невизначеними входами, тобто систем із частково відомою динамікою.

**Список літератури:**

1. Kitanidis, P. K. Unbiased minimum-variance linear state estimation, Automatica, vol. 23, pp. 775–778, 1987.

2. Darouach M., Zasadzinsk M. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs, Automatica, vol.33, pp. 717–719, 1997.

3. Hou M., Patton R. J. Optimal filtering for systems with unknown inputs. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 43, pp. 445–449, 1998.

4. Keller J. Y., Darouach M., Caramelle L. Kalman filter with unknown inputs and ro-bust two-stage filter, Int. J. Syst. Sci., vol. 29, pp. 41–47, 1998.

5. Volovyk A., Kychak V., Osadchuk A., Zhurakovskyi B. Fault Identification in Linear Dynamic Systems by the Method of Locally Optimal Separate Estimation. Emerging Networking in the Digital Transformation Age. TCSET 2022. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 965. Springer, Cham.

6. Delyon B., Zang Q. On the optimality of the Kitanidis filter for state estimation re-jecting unknown inputs. // Automatica 132, October 2021.

7. Sun J., Zhou J., Gu X. Variational Bayesian Two-Stage Kalman Filter for Systems with Unknown Inputs. Procedia Engineering 29(2012), 2265–2273.

8. Kong H., Shan M., Sukkarieh S., Chen T., Zheng X. Kalman filtering under un-known inputs and norm constraints.//Automatica, Volume 133, November 2021, 109871. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109871
9. Hsieh C. S. , Chen F. C. Optimal solution of the two-stage Kalman estimator, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 44, pp. 194–199, 1999.
10. Hua J., Wang N., Zhao K. Simultaneous Unknown Input and State Estimation for the Linear System with a Rank-Deficient Distribution Matrix. Mathematical Problems in Engineering 2021(12):1-11.
11. Zhu H., Zhang G., Li Y., Lung H. A novel robust Kalman filter with unknown non-stationary heavy-tailed noise. Automatica, Volume 127, May 2021, 109511, https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109511
12. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 14, pp. 359–367, 1969.
13. Alouani A. T., Rice T. R., Blair W. D. A two-stage filter for state estimation in the presence of dynamical stochastic bias, in Proc. Amer. Contr. Conf., Chicago, IL, 1992, pp. 1784–1788.
14. Volovyk A., Kychak V., Havrilov D. Discrete Kalman Filter Invariant to Perturbations. Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 18, No. 10, 2021, pp. 21–41.

**Volovyk A.Yu. LOCALLY OPTIMAL ROBUST ESTIMATES OF THE LINEAR SYSTEMS STATE WITH INDEFINITE INPUTS**

*Quite often, for practical problems, the system uncertainties of non-stationary linear dynamic systems are interpreted as unknown disturbance. In the mathematical model, they are taken into account by introducing additional uncontrolled inputs. In the presented work, the problem of linear discrete system state vector estimating in the presence of uncontrolled uncertain inputs is considered. As a rule, it is customary to take into account uncertain inputs in modeling as a random process with given statistics or to represent them as constant shifts. The disadvantage of this approach is that any inadequate assumption about their model negatively affects the quality of the filter. In theory, there are also filters of increased stability to the uncertain inputs influences, which form quasi-optimal estimates of the system state vector, regardless of the properties of the uncertain inputs themselves. A new method for constructing estimates of the time-varying linear system state in the presence of uncertain inputs is proposed, which is based on the use of a two-stage technology for splitting the extended Kalman filter into two, working in parallel, highly specialized filters of smaller dimension. The novelty of the method lies in the development of a simplified structure of a two-stage Kalman filter resistant to the uncertain inputs influence. The proposed method is an alternative to the Kitanidis robust filter and is distinguished by the simplicity of mathematical derivation and the absence of time-consuming optimization procedures using variational calculation, like the Lagrange vector multiplier method with its inherent limitations. The practical value of the proposed robust filter synthesis method is determined by the possibility of its application as a supplement to the standard Kalman filter as a means of achieving the filtering process optimal quality for uncertain inputs systems, in other words, systems with partially known dynamics.*

***Key words:*** *uncertain input, decomposition, two-stage approximation of the extended Kalman filter, robust filtering.*